

Algemat: àlgebra amb materials

Anna Vilaró Utrillo

Professora de matemàtiques de secundària
anna@annahelpme.com

Resum

Sovint, trobar un bon material manipulatiu de matemàtiques que sigui estructurat és difícil. I encara és més complicat treballar continguts corresponents a l'ESO.

En aquest article s'explica l'experiència d'una professora que, com a resultat de la seva investigació i pràctica a l'aula, ha dissenyat un nou material manipulatiu.

S'aporten reflexions sobre diferents materials per treballar l'àlgebra i la seva idoneïtat per complir els objectius establerts. I més tard, s'exposa el material d'autocreació: ALGEMAT (Àlgebra amb material) explicant amb exemples com permet treballar diferents operacions matemàtiques.

Abstract

Finding good mathematics manipulative material that is structured is often difficult. And even more so if you want to work on content for compulsory secondary education. This article explains the experience of a teacher who, as a result of her research and practice in the classroom, has designed new manipulative material. Reflections are provided on different materials for working on algebra and their suitability to achieve the established objectives. Later, the self-creation material is presented: ALGEMAT (algebra with material), explaining with examples how it can be used to learn different mathematical operations.

Abans de començar a explicar què és l'Algemat, és important saber com va sorgir. Som-hi!

1. Introducció

Em dic Anna Vilaró Utrillo, fa més de 20 anys que soc professora de matemàtiques a secundària i sempre he tingut interès a poder treballar amb materials manipulatius.



Anna Vilaró Utrillo.

Com ja sabeu, els materials manipulatius són un recurs que ens ajuda a fer el pas del que és concret al que és abstracte i a l'assoliment de les competències, com també facilita l'atenció a la diversitat... Aquesta idea es va començar a gestar fa temps, per exemple en aquest text de Thomas R. Post (1981):

El uso de los manipulativos, un tipo particular de recursos, se presenta en el marco de las investigaciones realizadas desde las primeras décadas del siglo XX en relación con la formación y evolución de conceptos en los niños (Piaget, 1971; Dewey, 1938; Bruner, 1960; Dienes, 1969). Estas investigaciones sugieren que en algunos momentos los conceptos de los niños evolucionan a través de la interacción directa con el ambiente y que precisamente los manipulativos son vehículos que permiten que esto suceda. La importancia de este tipo de estudios se asocia al reconocimiento de la posibilidad de que se proporcione un conjunto de evidencia «persuasiva» para los docentes de matemáticas en relación con el uso de materiales manipulativos en la clase de matemáticas.

Més recentment, Goñi *et al.* (2011) fan referència al fet que en l'actualitat la majoria d'informació ens arriba en dues dimensions a través de diaris, revistes, fotografies, ordinadors, tauletes..., i per això mateix és imprescindible tenir recursos per fer el trajecte fins a la tercera dimensió. És en aquest camí on la manipulació d'objectes adquireix una importància cabdal: no és el mateix veure representacions que tocar-les.

L'àlgebra requereix un nivell d'abstracció elevat, i en aquest sentit vaig estar buscant un material que ajudés el meu alumnat a passar de la concreció a l'abstracció d'una manera natural. Que ells mateixos poguessin treure conclusions a través de l'observació del que havien manipulats.

L'objectiu era treballar l'àlgebra fent connexions amb la geometria, nombres enters, aritmètica, etc., a través d'un context geomètric en l'espai. I pel que fa a continguts d'àlgebra, poder treballar sumes, restes, multiplicacions i divisions amb polinomis, factoritzacions, equacions de $1r$, $2n$ i $3r$ grau, etc.

Aquest plantejament és coherent amb la visió d'alguns autors que indiquen que «passar de l'aritmètica a l'àlgebra saltant-se la geometria es pot considerar un error didàctic i històric,

que té explicació en el context del segle XVII quan la força del nou llenguatge simbòlic va desplaçar el raonament geomètric visual» (Katz i Barton, 2007).

2. Exploració de propostes per treballar l'àlgebra

Vaig començar utilitzant Algebra Tiles. Es tracta d'unes peces rectangulars i quadrades que es poden fabricar a l'aula amb goma eva i permeten fer operacions amb polinomis fins a grau 2. Podem dir que posa en joc aspectes de la geometria 2D, ja que tenen en compte l'amplada i l'alçada.

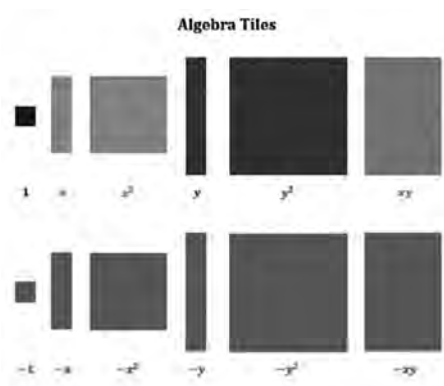


Figura 1. Algebra Tiles. La segona fila correspon a la part del darrere de les peces i ens indiquen els negatius.
(Font: <https://www.smartick.es/blog/matematicas/algebra/>)

A sota de cada peça, hi consta la part negativa i, per tant, no necessita cap tauler per indicar-ho. No obstant, requereix que l'alumnat tingui un coneixement profund dels nombres enters. Pressuposa que l'alumnat domina la regla dels signes.

I com ja s'ha comentat, només treballa fins a monomis de grau 2.

Continuant amb la recerca, vaig descobrir l'Algeblocks i l'Algebra Lab Gear. Dos materials utilitzats majoritàriament a gran part d'Amèrica i Austràlia i que eren molt poc coneguts a Europa. Aquests materials estan formats per uns prismes que permeten treballar amb mo-



Figura 2. Peces d'Algeblocks. (Font: Da Silva, 2018, p. 88.)

nomis de grau 3 pel fet que tenen en compte l'alçada, l'amplada i la fondària. Podem dir que permeten abordar aspectes geomètrics de 3D.

Pel que fa a l'Algeblocks, les peces necessiten un tauler per tal d'identificar si són positives o negatives. I també necessita dos taulers més: un per a les equacions i un altre amb eixos.

Cal dir que quan em vaig disposar a adquirir l'Algeblocks, em va ser impossible comprar-lo a causa del preu, que era molt elevat.

Al seu torn, l'Algebra Lab Gear consta d'unes peces similars a l'Algeblocks, però no utilitza taulers. Col·loca les peces en un escaire de plàstic i per identificar les negatives les situa a sobre de les positives.

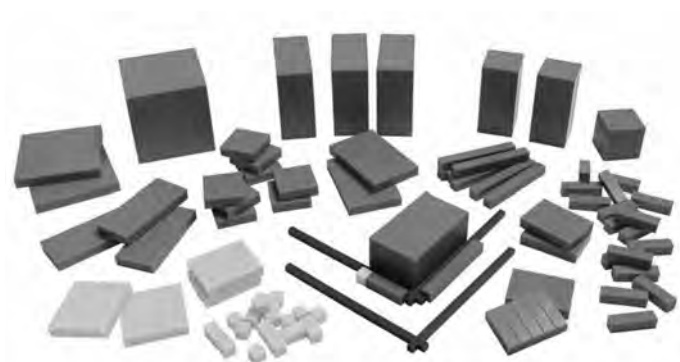


Figura 3. Peces de l'Algebra Lab Gear (Font: Didadx Inc.).

Aquest el vaig poder adquirir, però quan el vaig tenir a les mans el disseny em va desil·lusionar. És de plàstic i les peces són molt petites, no diferencia les variables per colors i el treball amb els nombres negatius no és gaire intuïtiu. En aquest sentit, semblava més funcional l'Algeblocks, però també és poc pràctic haver de treballar amb tres taulers diferents.

Tot i que no he arribat a fer servir cap dels dos materials esmentats, han sigut imprescindibles per conèixer i entendre la potencialitat d'aquesta mena de recursos. També hi ha nombrosos estudis que els avaluen en l'aula i això em donava una certa seguretat pel que fa als bons resultats que poden assolir (Blanco i Solares, 2017; Da Silva *et al.*, 2017, etc.).

Aquesta experiència amb materials previs va ser crucial per decidir i dissenyar el meu material fent-hi les adaptacions que em van semblar adequades. Va ser el moment d'anar-me'n al fuster (això va ser al 2020) i fer-li el primer encàrrec del que volia que fos l'Algemat.

3. ALGEMAT

L'Algemat consta d'una caixa de fusta amb dos taulers amb uns eixos, deu tipus de prismes diferents i dues peces amb el símbol igual, i està preparat perquè hi puguin treballar quatre alumnes.

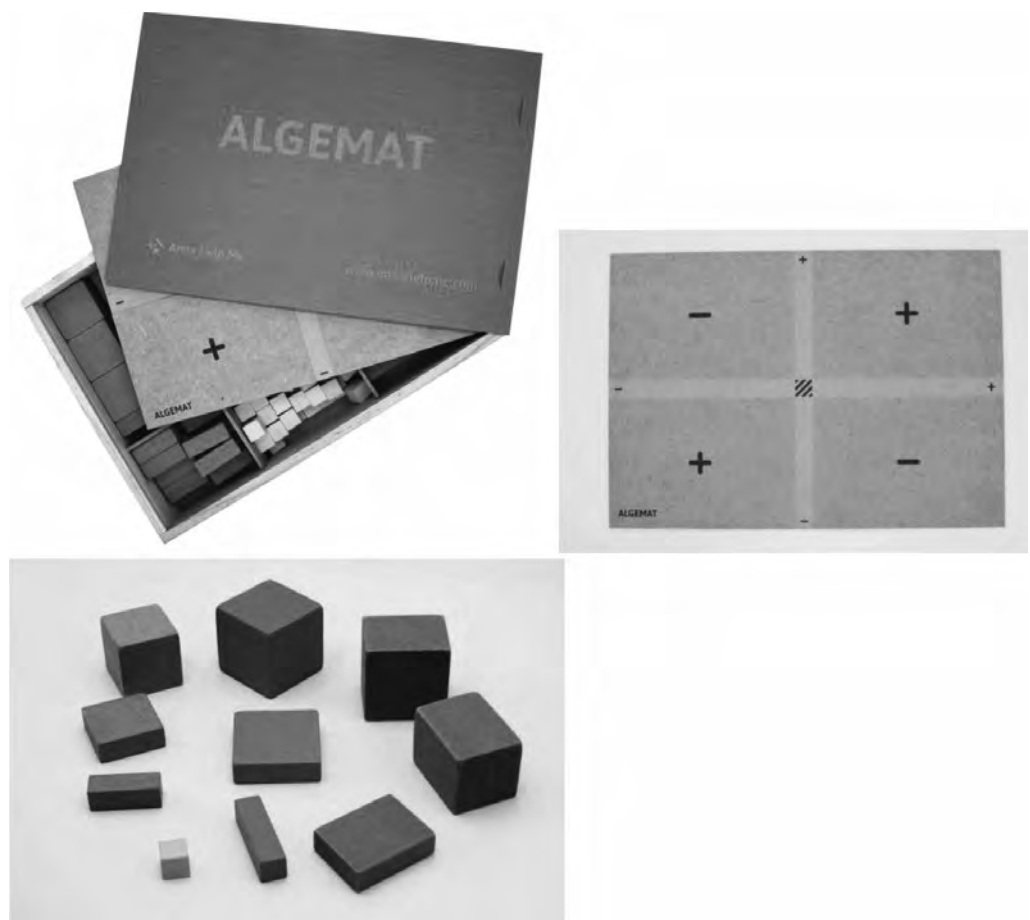


Figura 4. Peces de l'Algemat (Font: elaboració pròpia).

L'interès de molts professors per treballar l'àlgebra amb materials manipulatius ha donat lloc a nombrosos recursos. Entre els més estesos hi ha els blocs de Dienes i els reglets de M. Antònia Canals. La taula 1 recull les diferències que ens proposen l'Algemat, l'Algeblocks i l'Algebra Lab Gear respecte dels que tenen més penetració a Catalunya.

Taula 1. Comparativa de materials manipulatius.

Blocs de Dienes (1963)	Tot i que constitueixen el material base dels altres que mencionem, només hi podem treballar amb una sola variable. I, a més, les peces que la representen contenen un nombre exacte d'unitats. És per això que aquest material està més indicat per treballar els nombres naturals, els decimals positius, etc.
Reglets de M. Antònia Canals (anys setanta)	Es pot arribar a treballar l'àlgebra amb els reglets, però pot crear confusió, ja que cada reglet correspon a un nombre exacte d'unitats i la idea de variable es perd. Tampoc conté peces que relacionin dues variables. Per tant, estan més indicats per treballar l'àritmètica.
Algemat (2020) Algeblocks (1996) Algebra Lab Gear (1994)	Amb aquests materials podem treballar amb dues variables i les peces no tenen assignat un nombre exacte d'unitats. D'altra banda, mantenen la idea de variable i també incorporen les peces que relacionen dues variables: xy , x^2y i y^2x .

Ara que ja hem vist com va sorgir l'Algemat i què és, farem una pinzellada de com es fa servir!

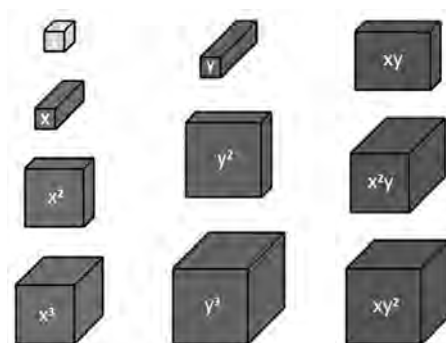


Figura 5. Peces de l'Algemat amb la seva denominació.

Un aspecte important que cal destacar és que aquestes peces no tenen signe. Dependrà d'on les situem al tauler, dins els eixos (a manera de distància, per exemple en la figura 6 a la dreta) o als quadrants del tauler (a manera d'unió, en la figura 6 a l'esquerra), que seran positives o negatives.



Figura 6. Representacions de $-2x$.

En la figura 6 es pot veure representada l'expressió $-2x$ de dues maneres diferents: la de l'esquerra és $2x = 2 \cdot x$; per tant, agafem 2 peces x i, en aquest cas, com que estan ubicades a la zona del tauler negatiu, tenim que la seva equivalència és la imatge de la dreta.

Per fer-ho més entenedor i visualitzar les connexions entre aritmètica i àlgebra, farem operacions només amb unitats i les mateixes operacions amb expressions algebraïques.

Podem observar que la forma geomètrica que adopten les unes i les altres són les mateixes.

3.1. Operació suma

$$2 + 3 = 5$$



Figura 7. Exemple operativa de suma.

Podem fer aquesta operació dins un quadrant positiu del tauler (com a unió de conjunts) o a dins d'un eix positiu en què forma una línia (suma de distàncies).

$$-4 + 1 = -3$$

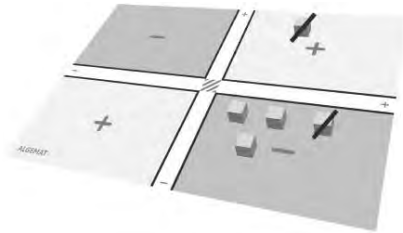


Figura 8. Exemple d'operativa de suma amb nombres de diferent signe.

Dins del tauler no hi poden conviure les mateixes peces en positiu i en negatiu alhora, ja que s'anul·len entre elles (formen zeros). Llavors les traurem del tauler (les hem ratllat en la figura 8 per tal de fer-ho visual).

Un cop hem tret les peces que s'anul·len, el resultat de l'operació serà el de les peces que ens han quedat.

Passem ara a veure com s'opera amb expressions algebraiques.

$$(2x + 3) + (1 - x) = x + 4$$

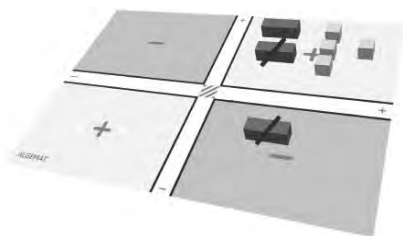


Figura 9. Exemple d'operativa de suma algebraica.

Tot i que seguim el mateix procediment que abans, cal recordar que només es poden sumar i restar monomis semblants. Amb l'Algemat és força evident, ja que les peces han de tenir la mateixa forma i la mateixa mida.

3.2. Operació resta

Quan només treballem amb unitats considerem la resta com a suma de nombres oposats.

$$3 - 1 = 2$$

Posem les peces al tauler com si hi haguéssim escrit $(+3) + (-1) = 2$.

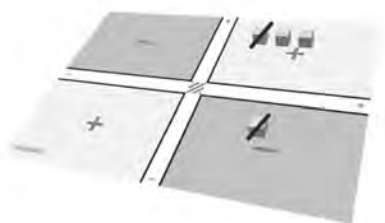


Figura 10. Exemple d'operativa de resta.

Pel que fa a les expressions algebraiques, hem de recordar que un dels tres significats que té el símbol menys és el de l'oposat. Per tant, tot el que tinguem darrere del signe menys, els farem el seu oposat, canviant-los el signe. És per això que a l'hora de distribuir les peces al tauler ja ho fem amb el signe canviat.

$$(3x - 1) - (2 - 2x) = 5x - 3$$

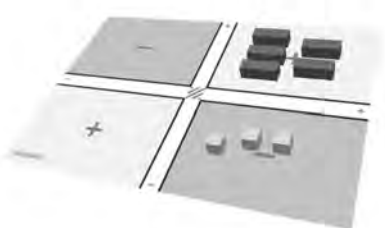


Figura 11. Exemple d'operativa de resta algebraica.

Posem les peces al tauler fent: $(3x - 1) + (-2 + 2x)$: és clar que tenim $3x + 2x = 5x$ (peces rectangulars blaves de la figura 11) i $(-1) + (-2) = -3$ (peces quadrades grogues de la figura 11).

3.3. Operació multiplicació

Hem comentat abans que si fem les sumes dins els eixos es formen línies. Doncs ara, amb les multiplicacions de dos factors, formarem quadrats o rectangles. Haurem de posar els factors en els eixos i el resultat el formarà l'àrea del rectangle que hem construït. Estem treballant en 2D!

$$2 \cdot 3 = 6$$

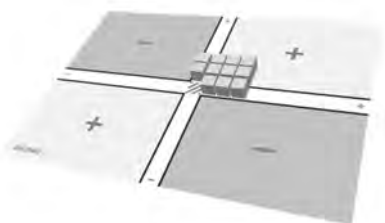


Figura 12. Exemple d'operativa de multiplicació.

Per multiplicar dues expressions algebraiques, haurem de posar-ne una en l'eix vertical (representació del valor 2 en la figura 12) i l'altra en l'eix horitzontal (representació del valor 3 en la figura 12). D'aquesta manera indiquem el valor dels costats que tindrà el rectangle que hem de construir. L'àrea del rectangle serà el resultat d'aquesta multiplicació.

Cal tenir present una de les normes del mètode: el rectangle s'ha d'omplir complint la condició que les peces han d'encaixar. Quan una peça és al costat d'una altra, els costats han de ser iguals. Funciona com un trencaclosques. Vegem ara la manera correcta de col·locar les peces amb l'Algemat:



Figura 13. Exemples de col·locació correcta de peces.

Manera incorrecta de col·locar les peces amb l'Algemat:



Figura 14. Exemples de col·locació incorrecta de peces.

Per tant, per descobrir el producte de dues expressions algebraiques, per exemple $(x + 3) \cdot (x + 1) = x^2 + 4x + 3$, col·locarem en els eixos l'enunciat com indica la figura 15 i seleccionarem les peces adequades (figura 16): així es construeix físicament l'expressió algebraica desenvolupada.

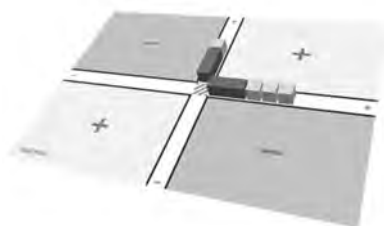


Figura 15. Enunciat de la multiplicació algebraica.

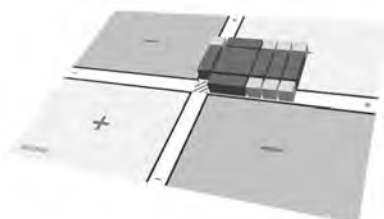


Figura 16. L'àrea del rectangle és el resultat de la multiplicació.

Vegem ara un altre exemple en què les expressions algebraiques contenen factors oposats: $(-x + 2) \cdot (3x - 3) = -3x^2 + 9x - 6$. Situem $(-x + 2)$ en l'eix vertical i en l'horitzontal fem $(3x - 3)$ com es pot observar en la figura 17. En aquest cas el rectangle que hem de construir ens ocupa els quatre quadrants del tauler.

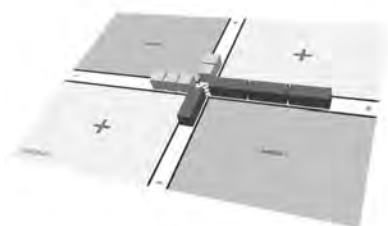


Figura 17. Enunciat de la multiplicació.

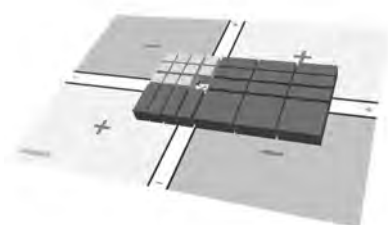


Figura 18. Resultat de la multiplicació.

Quan fem multiplicacions amb polinomis, hem de tenir en compte si cal fer anul·lacions de peces (en els exemples exposats no n'hi ha) i llavors fer el recompte de les peces de tots els quadrants.

I si multipliquem 3 factors? Trobarem prismes o cubs. Estem treballant amb volums i per tant, en 3D!

$$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

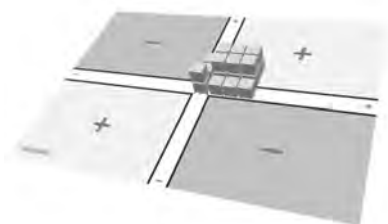


Figura 19. Enunciat de la multiplicació de 3 factors.

$$x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) = x^3 + 3x^2 + 2x.$$

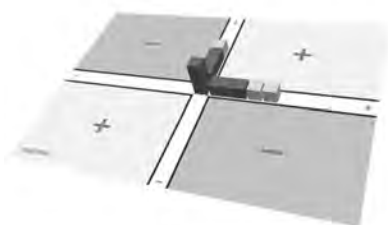


Figura 20. Enunciat de la multiplicació algebraica.

En aquest cas el resultat de la multiplicació agafa el volum d'un prisma (figura 21).

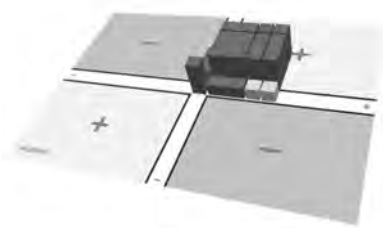


Figura 21. Resultat de la multiplicació.

3.4. Operació divisió

Quan dividim, el dividend serà l'àrea d'un rectangle que hem de construir, amb la condició que un costat mesuri el que indica el divisor. La resposta la trobem en l'altre costat del rectangle (eix horitzontal, figura 22).

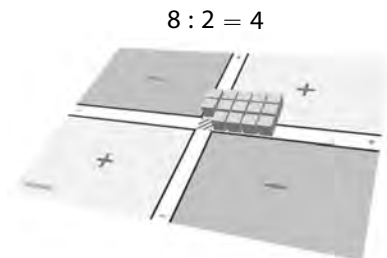


Figura 22. Resultat de la divisió.

$$(x^2 + 3x + 2) : (x + 1) = x + 2.$$

Si situem el divisor en l'eix vertical (com es pot observar en la figura 23), aleshores cal formar un rectangle amb el dividend tenint en compte que un costat ha de ser el divisor. El resultat de la divisió el trobem en l'eix que ens quedava per omplir (figura 24).

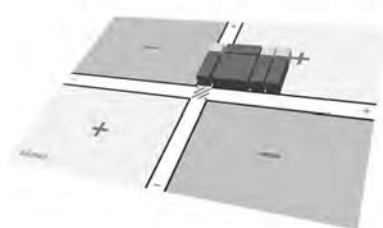


Figura 23. Enunciat de la divisió.

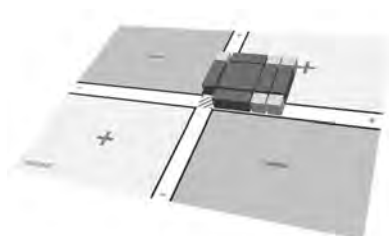


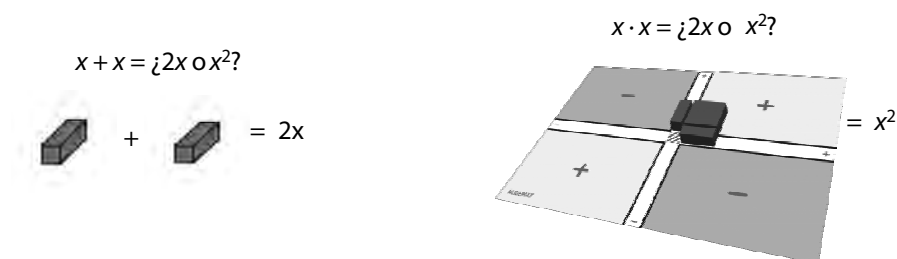
Figura 24. Resultat de la divisió.

3.5. Idees metodològiques per utilitzar Algemat a l'aula

Personalment, faig servir l'Algemat a l'inici de tots els continguts que habitualment es programen a segon i tercer de l'ESO, i paral·lelament amb la descoberta de com es fa segons la tradició. Permet que l'alumnat visualitzi l'àlgebra dins un context geomètric perquè després puguin treure les seves conclusions. Un cop ho han entès amb el material, la pregunta és: com ho faries sense l'Algemat?

Si han entès bé els conceptes són capaços d'explicar-ho de la manera com el professorat ho fa habitualment. També hi ha professorat que l'utilitza a quart d'ESO com a consolidació de continguts o fins i tot a primer de batxillerat per treballar uns aspectes concrets.

Treballar amb material obliga l'alumnat a focalitzar l'atenció, i així es poden evitar algunes de les confusions més habituals. Dos exemples:



La dinàmica de manipulació de les peces és beneficiosa perquè:

- Ajuda a fixar-se més en la lectura de l'enunciat (si és una suma, una multiplicació, etc.).
- Permet una comprensió més profunda de les operacions bàsiques, ja que es veuen des d'una altra perspectiva, vinculada a la forma geomètrica.
- Preveuen els resultats (els visualitzen) i a mesura que avancen no necessiten moure les peces. És llavors quan treuen conclusions.

També hi trobem algunes limitacions, en aquests materials, per exemple:

- No permeten treballar amb nombres decimals ni fraccionaris. Sempre es treballa amb nombres enters perquè no podem partir les peces.
- Només s'hi pot treballar amb quantitats limitades (segons la quantitat de peces de què disposem).
- No permet treballar amb monomis de grau superior a 3 (volums).

Finalment, arribem a la conclusió que les operacions que s'han après a fer amb aritmètica també es poden fer amb àlgebra i que, totes, mirant-les des del punt de vista geomètric, adquireixen unes formes concretes.

El material Algemat també permet, a banda de les operacions que hem vist, fer equacions de 1r, 2n i 3r grau, i treballar conceptes com ara: identitats notables, factorització, monomis semblants, valor numèric d'un polinomi, etc.

Després d'acabar de dissenyar l'Algemat i d'haver-lo utilitzat amb els meus alumnes, vaig pensar que potser altres professors hi podrien estar interessats. Ara bé, donar a conèixer el material per ell mateix és insuficient si el que es pretén és implementar un canvi en el sistema educatiu. Cal un acompanyament al professorat i remarcar la importància de la seva formació contínua. És per això que em vaig embranchar en el naixement d'Anna Help Me, un projecte que vol ajudar els professors en l'obtenció de recursos manipulatius i en l'anàlisi dels materials. De manera que faig assessorament a docents, imparteixo cursos i escric llibres divulgatius (Vilaró 2023a, 2023b). Si voleu saber-ne més, podeu veure una vintena de vídeos que ho expliquen a www.annahelpme.com o directament al canal del Youtube d'Anna Help Me.

Si ho heu trobat interessant, us animo a compartir l'Algemat amb aquells professors a qui encantaria trobar un material manipulatiu que els permetés treballar les matemàtiques a secundària!

4. Agraïments

Moltes gràcies als lectors i les lectores si heu arribat fins aquí! Vull adreçar un agraïment especial a la Noemí Ruiz Munzón per haver-me ajudat a escriure l'article.

Bibliografia

- [1] Blanco, Rocío; Solares, Cristina (2017). «Bloques multibase, Algeblocks y otros recursos para tocar las Matemáticas en Primaria y Secundaria». *VIII CIBEM Libro de resúmenes*. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas FESPM.
- [2] Bruner, J. (1960). «The Process of Education». Cambridge, MA: The President and Fellows of Harvard College.
- [3] Dewey, J. (1938). «The philosophy of the arts». *John Dewey: The Later Works*, 13(357-368).
- [4] Dienes, Z. P. (1969). *An Elementary Mathematics Program*. https://archive.org/details/ERIC_ED031397.
- [5] Goñi, J. M., Llenares, S., López-Goñi, I., Penalva, M. C., Planas, N., Valls J., Vanegas, Y. M., Corbalán F. i Giménez, J. (2011). *Didáctica de las Matemáticas* (vol. 12). Graó.
- [6] Katz, V. J. Barton, Bill (2007). «Stages in the history of algebra with implications for teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 185 --201.
- [7] Piaget, J. 1971. *Genetic Epistemology*, Edited by: Duckworth, E. Nova York: Norton.
- [8] Post, T. R. (1981). «The role of manipulative materials in the learning of mathematical concepts». *A Selected issues in mathematics education* (p. 109-131). Berkeley, CA: National Society for the Study of Education and National Council of Teachers of Mathematics, McCutchan Publishing Corporation.
- [9] Silva, L. E. da(2018). «Ensino intradisciplinar de Matemática através da resolução de problemas: o caso do Algeblocks». [Postgrau en Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista]. <http://hdl.handle.net/11449/154125>.
- [10] Silva, L. E. da; Camargo, A. S. M. de; Oliveira, P. C. (2021). «Propuestas didácticas para la educación básica que implican el uso del material manipulativo Algeblocks». *Revista Chilena de Educación Matemática*, vol. 13, núm. 2, p. 68-77.
- [11] Vilaró Utrillo, Anna. «Algemat-Guia didáctica». (2023a) ISBN: 978-84-09-52109-8.
- [12] Vilaró Utrillo, Anna. «Algemat-Quadern». (2023b) ISBN: 978-84-09-51902-6.